

I. MATEMATİKSEL MODELLEME

1.1. Sistemli yaklaşım veya sistemin analiz yöntemi

Ekosistemlerin araştırılmasının ve öğrenilmesinin metodolojik esasın oldukça önemli bilim dalı olan “Sitemin Yaklaşımı” veya “Sistemin Analizi” olarak adlandırılan yöntem teşkil etmektedir.

Sistemin teşhisini, analizini, incelenmesini, istenilen amaçları (sistemin tahmini, optimizasyonu, yönetimi, monitoringini) elde edilmesinin alternatif yollarını belirlemeyi hedefleyen ve birçok araştırma metotlarını kapsayan yöntemler bütünlüğünden oluşan bilim dalına “Sistem Analizi veya Sistemli Yaklaşım Yöntemi” denir.

Bu önemli problemin çözümünü elde etmek için sistem analizinin esas yöntemi şunlardır:

- *Arazi gözlemleri,*
- *Arazi ve laboratuvar koşullarında yapılması gereken denemeler,*
- *Modelleme.*

Bu yöntemlerin her birisi ekosistemin detaylı bilgilerinin elde edilmesini ve analizini sağlayarak, sistemli yaklaşım yönünden, onun incelenmesini kolaylaştırır.

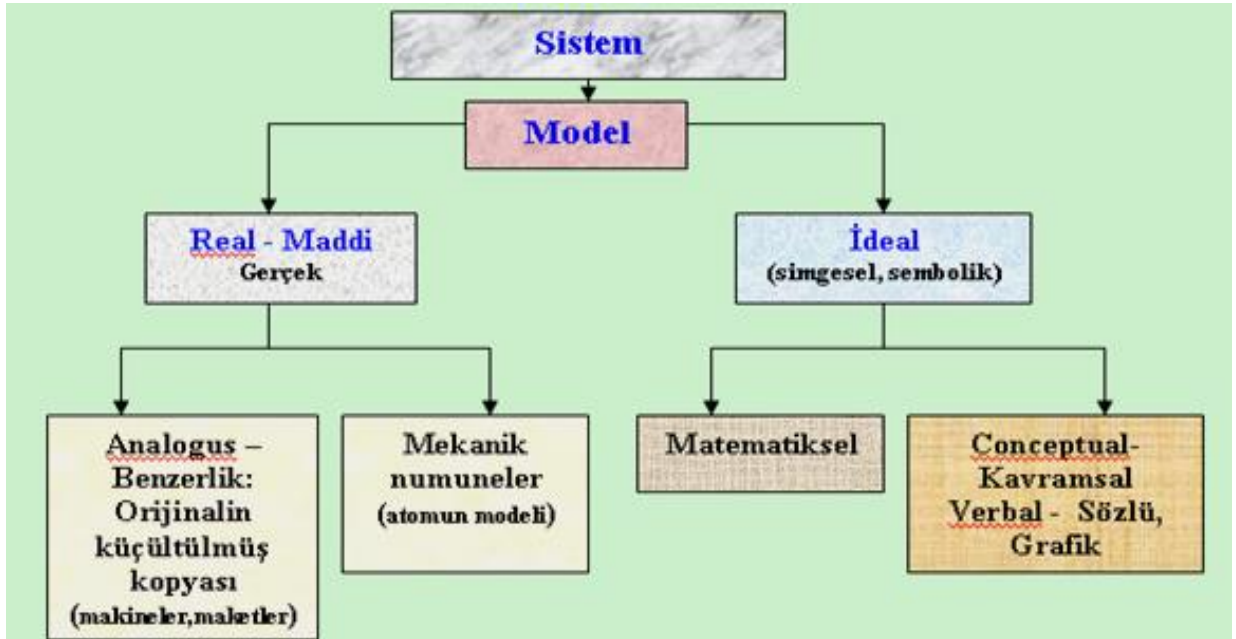
1.2. Model kavramı

Karmaşık yapıya sahip sistemlerin-varlıkların,-süreçlerin (proseslerin), cisimlerin, olayların incelenip araştırılmasını ve anlaşılmasını kolaylaştırmak için, gerçeğe uygun bir takım (fiziksel, kimyasal, biyolojik, jeolojik vs.) kanun ve kurallara dayanan varsayımlarla basitleştirilmiş haline “model” denir.

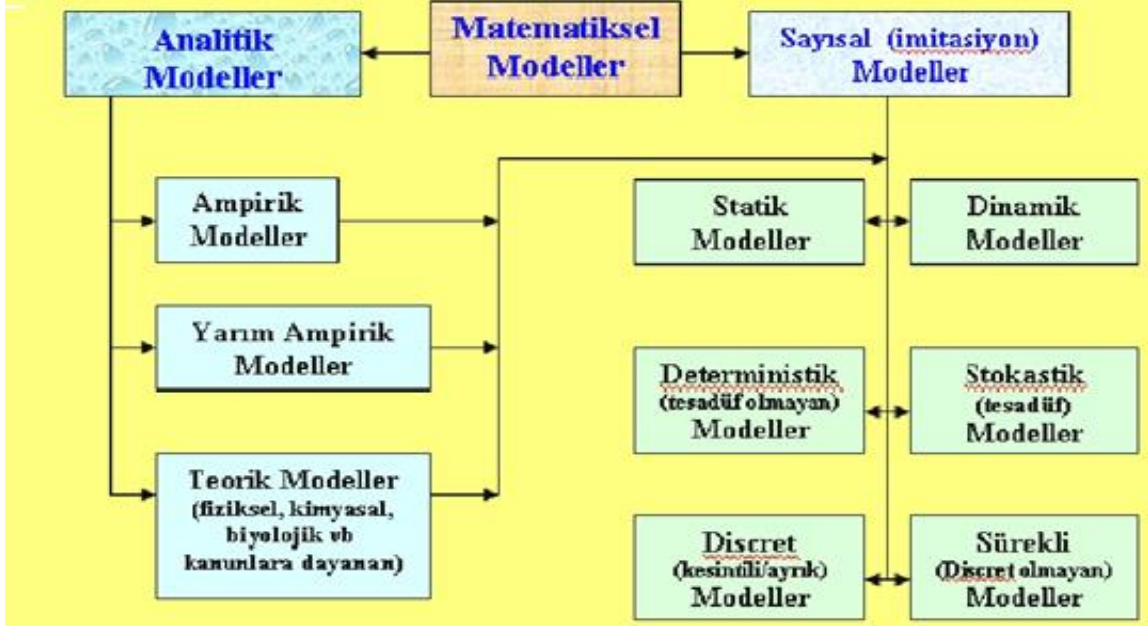
Tarımda deneyler yapılan parseller arazinin küçültülmüş modelidir. Tarım arazilerinde su, tuz, sıcaklık süreçlerinin, besin maddelerinin bitki kök bölgelerindeki hareketlerinin mekanizmalarını incelemenin daha kolay yolu olan Lizimetreler de bir modeldir.

1.3. Modellerin sınıflandırılması

İncelenmesi gereken sistemlerin özelliklerine ve araştırma amaçlarına bağlı olarak oluşturulacak modellerde farklı olurlar. Modellerin genel tasnifi şekil 2.13’de verilmiştir. Matematiksel bir model, en genel anlamıyla, herhangi bir sistemin veya bir sürecin ana özelliklerini matematik terimlerle ve simgelerle ifade eden bir eşitlik veya formül olarak tanımlanabilir.



Şekil 1.1. Modellerin genel tasnifi



Şekil 1.2. Matematiksel modellerin genel tasnifi

1.3. Modellerin önemi

Matematiksel modeller mümkün olduğu kadar bilgi kaynağı olarak değerlendirilebilir.

Model geliştirmekle, değişik dallardan bilim adamlarının bir araya gelerek multi-disipliner bir çalışmaya girmeleri ile ekip halinde bilim kaynağı ve koordinasyonu sağlanabilir.

Modellerin uygulamadaki katkıları ile yapılmakta olan denemelerin stratejisini ve planının daha iyi sonuçlarını elde etmek mümkün olabilir.

İyi adapte olmuş modellerin, tarla veya laboratuvarında kurulması planlanan ağır ve karmaşık denemelerin yerine kullanılması söz konusu olabilir.

Modellerin yararlarından en önemlisi; sulama, besin elementlerinin kullanılması, tuzluluk, ısı hareketi vs. gibi ekolojik sorunlara ışık tutabilir olmaları, diğer yandan da bütün dış etmenlerin etkisiyle, elde edilecek üretimin değerlendirilmesi için ekonomik sorunlara cevap verebilir düzeyde olabilmeleridir (Poluektov, 1991).

2. ANALİTİK MODELLER

Tüm bu modeller, elde edilmesine göre üç temel grup altında toplanabilir. Bunlar;

2.1. Basit-mantıksal modeller

Bu gibi modeller, temel fiziksel-kimyasal faktörleri ayrıntılı bir biçimde göz önüne almadan, araştırılan konuyu (örneğin, topraklarda sadece tuzun taşınmasını) kabaca ifade etmektedir.

2.2. Ampirik (deneysel) modeller

Bu grup modeller çok sayıda deneme (örneğin, yıkama denemeleri) verilerinin istatistiksel analizleri sonucundan elde edilirler ve genel olarak *deneysel modeller olarak adlandırılırlar*.

Bir tablo yardımıyla verilen f fonksiyonu için belirlenmesi gereken Ampirik Modeller genel olarak aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{u} = f(\vec{a}; \vec{x}) = f(a_1, a_2, \dots, a_m; x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (2.1)$$

Burada, a_1, a_2, \dots, a_m - hesaplanması gereken parametrelerdir. Örneğin, onlar En Küçük Kareler yöntemini kullanarak hesaplanırlar.

Ampirik modellerin basit olması için parametrelerine göre doğrusal olan fonksiyonlar:

$$\tilde{u} = a_0 \cdot \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_p) + \dots + a_m \cdot \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (2.2)$$

amacımıza hizmet edecektir.

Burada, $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_p)$ -Baz Fonksiyonları denir. Onların her birisi farklı fonksiyonlar olabilirler. Ampirik modellemenin en temel ve zor aşaması, denklem (2.1) veya (2.2) 'deki f ve φ lerin analitik ifadelerinin belirlenmesini içerir.

Bir değişkenli deneysel modellerde sık sık kullanılanlar:

Линейная:	$\tilde{y} = ax + b$	Параболическая	$\tilde{y} = ax^2 + bx + c$
Полиномиальная	$\tilde{y} = \sum_{i=0}^n a_i x^i$	Степенная	$\tilde{y} = ax^b$
Показательная	$\tilde{y} = ab^{cx}$	Биномальная	$\tilde{y} = ax^b e^{-cx}$
Гиперболическая	$\tilde{y} = \frac{ax}{b+x}$	Логарифмическая	$\tilde{y} = a \ln x + b$
Тригонометрическая	$\tilde{y} = a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$		

Laktasyon proseslerinin modellemesinde kullanılan:

Эмпирические модели	Авторы	Эмпирические модели	Авторы
$y = a + bt + ct^2$	Dave, 1971	$y = at^b e^{-ct}$	Wood, 1967
$y = a + bt + c/t$	Bianchini, 1984	$y = at^b e^{-ct-d/t}$	Mikhailsoy, 2013
$y = a + bt + ct^2 + dt^3$	Mikhailsoy, 2005	$y = at^b e^{-ct-dt^2-k/t}$	Mikhailsoy, 2013
$y = t/(a + bt + ct^2)$	Nelder, 1966	$y = e^{a-bt-ct^2-d/t}$	Morant and Gnanasakthy, 1989
$y = a + ct + be^{-0,61t}$	Wilmink, 1987	$y = a + b\sqrt{t} + c \ln t$	Guo and Le Du, 1978
$y = a(1 - e^{-bt}) - c$	Cobby and Le Du, 1978	$y = a + bt + ct^2 + d \ln t + k(\ln t)^2$	Ali and Schaffer, 1987

Çok değişkenli deneysel modellerde sık sık kullanılanlar:

Линейная:	$\tilde{y} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$
Параболическая	$\tilde{y} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$
Иррациональная	$\tilde{y} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sqrt{x_i} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot \sqrt{x_i x_j}$
Степенная	$\tilde{y} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n}$
Показательная	$\tilde{y} = a_0 e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n}$
Показательно-Степенная	$\tilde{y} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} e^{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n}$

$$\tilde{u} = f(a_{ij}; x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j$$

Models	Polynomial Models
1	$\tilde{u} = a_0 + a_1 x + a_2 y$
2	$\tilde{u} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$
3	$\tilde{u} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2$
4	$\tilde{u} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 x^2 y + a_7 xy^2$
5	$\tilde{u} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 x^2 y + a_7 xy^2 + a_8 x^3 + a_9 y^3$

We assume that $u(t)$ describes the size of a population at time t . It is known that the Verhulst (1838) and Pearl (1920) model (or logistic growth model) is a differential equation, which relates the change in population size over time, du/dt , to the growth events (for example, birth, death, etc.) that occur with time:

$$\frac{du}{dt} = ru \left(1 - \frac{u}{k}\right) \quad \text{or} \quad \frac{du}{dt} = ru - \delta u^2 \quad (\delta = r/k) \quad (2.3)$$

where the parameter r – describes the growth rate (reproduction) and k – supportive environmental capacity (i.e. the maximum possible population size), δ – intraspecific competition ratio describing, as well as r , a specific population. The solution to this equation under the initial condition $u(t=0) = u_0$ is written as follows:

$$u(t) = \frac{ku_0 \cdot e^{rt}}{(k - u_0) + u_0 \cdot e^{rt}} = \frac{ku_0}{u_0 + (k - u_0)e^{-rt}} = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{u_0} - 1\right)e^{-rt}} \quad (2.4)$$

The model (1) and its solution (2) were often used in various applied studies. Analyzing these solutions and generalizing them, we propose a new solution, special cases of which were published in papers (Lokhorst, C., 1996; Kutsenko, 2012, etc.).

For our research tasks, this solution will have the following form, which describes erosion rates depending on the concentration of dust:

$$y = a + bx + cx^2 + \frac{d}{1 + \exp(k + qx)} \quad (2.5)$$

where y is the wind erosion rate, $g \cdot m^{-2} \cdot min^{-1}$; x is the dust concentration, $mg \cdot m^{-3}$.

2.3. Teorik modeller

Bu grup modeller çeşitli Bio-fiziksel ve bio-kimyasal, Jeokimyasal ve Hidrodinamik metod ve prensiplere dayanarak elde edilirler.

Örneğin tuzlu toprakların yıkanması sürecini en uygun ifade eden model

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\theta C + \rho b_1 + b_2) &= \theta D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \theta v \frac{\partial C}{\partial x} - \theta \mu C \\ b_1 &= k C \\ \frac{\partial b_2}{\partial t} &= -\gamma(C_H - C) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Ve onun çözümünde elde edilen **Yıkama Suyu Normunun** hesaplanması formülü:

$$N_{ys} = A \ln \left(\frac{S_0 - S_w}{S_t - S_w} \right), \quad A(\eta, \theta, \kappa, \rho, L) = \frac{(\theta + \kappa \rho) L}{h_1^2 + \eta^2} \quad (2.7)$$

Olarak bulunur.

Burada; S_0 ve S_t - Toprağın $[0, L]$ katmanının yıkamadan önce başlangıçtaki ve yıkamadan sonra kabul edilebilir ortalama tuzluluğu (tuza tolerans seviyesi), ($g \cdot l^{-1}$, $dS \cdot m^{-1}$, %); S_w - Yıkama suyunun konsantrasyonu, ($g \cdot l^{-1}$, $dS \cdot m^{-1}$, %); θ - Yıkanacak toprak katmanının ortalama porozitesi, (%); $\eta = L/4\lambda$ - Pekle parametresi; $D = D_m + \lambda v$ Konvektif difüzyon parametresi, ($m^2 \cdot gün^{-1}$); D_m - Moleküler difüzyon parametresi, ($m^2 \cdot gün^{-1}$); λ - Hidrodinamik-dispersiyon parametresi, (m); v - Gözeneklerdeki çözeltinin infiltrasyon hızı, ($m \cdot gün^{-1}$); ρ_b - Toprağın hacim ağırlığı, ($kg \cdot m^{-3}$); κ - Freundlich adsorpsiyon denkleminin sabiti, ($m^3 \cdot kg^{-1}$); t - zaman, (s); L - Yıkanacak toprak derinliği, (m).

3. MODELLERİN SEÇİLMESİ. Model seçim ölçütleri (kriterleri)

Modelin denenmesi, modelin tanınması, tanı kontrolü, aşama seçimi - belirlenmesi, uygunluk testi gibi isimler alır. Bu aşamada sürecin fiziksel yapısına uygun olduğu düşünülerek korelogramı ve parametreleri belirlenen modeller arasından, incelenen sürece en uygun olan modelin belirlenmesi işlemi yapılmaktadır.

Model seçimi ve geçerliliği, regresyon modelinin tahminleme gücünü etkileyen önemli bileşenlerdir. İyi bir modelin kurulabilmesi tamamen doğru değişkenlerin seçimine dayanmaktadır. Böylece, modellerin tahmin hatası minimuma inmekte ve modeller istenmeyen değişkenlerden korunmuş olmaktadır.

Genel olarak istatistiksel modelleme ve model hesaplama problemlerinde model karmaşıklığı kavramı önemli bir rol oynar. Karmaşıklık bağlantı yapıları olarak tasarımlar ve model bileşenlerinin etkileşimlerini içerir. Model karmaşıklığının bir ölçümü olmaksızın model davranışını tahmin etmek ve modelin kalitesini değerlendirmek zordur. Bu sebeple modellerin tümü arasından en iyi modeli seçmek için detaylı olarak istatistiksel bir analize ve oluşturulan sonlu bir örnekleme için hesaplamalara gereksinim duyulur.

En iyi regresyon modelinin belirlenmesinin iki amacı vardır: Birincisi, modele katkı istatistiksel olarak anlamsız değişkenleri çıkararak, oluşturulan modelin değişken sayısının azaltılması istenir. Böylece işlemler için gereken süre ve maliyet azalır. İkincisi ise modelin

olası birçok regresör içermesi istenir. Çünkü değişkenlerdeki bilgi içeriği, tahmin edilen yanıt değerlerini etkiler (Montgomery ve ark., 2001).

Model seçiminde kullanılan bilgi kriterleri, veri setlerinin üretilmesi aşamasında değil; analiz sonuçlarının yorumlanması aşamasında devreye girmektedir.

Modeller arasında seçim yapmak için bir yöntem de belli bir ölçüyü temel almaktır.

Tüm bu ölçütler Kalıntı Kareler Toplamı'nı (RSS) minimuma indirmeye dayanır. Ayrıca, R^2 dışında hepsi de açıklayıcı değişken sayısında "tutumlu" olmayı teşvik edicidir.

AIC, BIC ve HQC özellikle zaman serileri modellerinde gecikme uzunluğunun belirlenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

En uygun modelin verilere uygun olması ve bununla birlikte tahmin başarısının da çok iyi olması gerekmektedir. Modellerin tahmin başarılarının kıyaslanması maksadıyla çeşitli değerlendirme ölçütleri kullanılmaktadır. Bu ölçütlerden bazıları; Kalıntı Kare Toplamı (RSS), Tahmini Kare Toplamı (ESS), Karenin Toplamları (TSS) hesaplamalarıdır.

Toprak sıcaklığının modellenmesinde ve en uygun olan modellerin belirlenmesinde yaygın olarak kullanılan yaklaşımları şu şekilde açıklayabiliriz:

1. Korelasyon katsayısı (η veya R):

Parametrelere göre doğrusal olan deneysel modeller için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 = \sum_{i=1}^n (u_i - \tilde{u}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\tilde{u}_i - \bar{u})^2 \quad (3.1)$$

$$TSS = ESS + RSS$$

Dispersiyon analizinin esas teoremi olan (1) eşitliğindeki parametrelere göre doğrusal olan deneysel modeller için burada yaygın olarak aşağıdaki işaretlemeler kullanılır.

$$\text{Kalıntı Kare Toplamı; } RSS = \sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - \bar{y})^2 ,$$

$$\text{Tahmini Kare Toplamı; } ESS = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 \text{ ve}$$

$$\text{Karenin Toplamları; } TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \text{ olarak formülize edilmişlerdir.}$$

Korelasyon katsayısı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{ESS}{TSS}} \quad (3.2)$$

u_i is the observed values of dependent variable;

\tilde{u}_i is the estimated values of dependent variable;

$\bar{u} = \sum_{i=1}^{i=n} u_i / n$ – is the average of the observed values;

n is the number of data points;

p is the number of estimable parameters in the approximating model including the intercept term, while $p < n$;

R^2 is coefficient of determination;

RSS stands for the regression sum of squares and is given by $RSS = \sum_{i=1}^{i=n} (\tilde{u}_i - \bar{u})^2$;

ESS is Error Sum of Squares and is given by $ESS = \sum_{i=1}^{i=n} (u_i - \tilde{u}_i)^2$;

MSR is Mean Square for Regression and is given by $MSR = RSS / (p - 1)$; and

MSE is Mean Square Error and is given by $MSE = ESS / (n - p)$;

Burada, y_i — Gözlemlenen bağımlı değişkenin (ölçülen sıcaklık) değerleri, \tilde{y} — Bağımlı değişkenin regresyon denkleminde göre hesaplanmış (tahmin edilen sıcaklık) değerleri, \bar{y} — Bağımlı değişkenin ortalama (ölçülen sıcaklıkların ortalaması) değerleridir. İki değişken (x_i ve y_i) arasındaki uyumu gösteren katsayıya korelasyon katsayısı (r) denir. Eğer bu uyum doğrusal fonksiyonla ifade edilirse bu durumda (η) değeri korelasyon katsayısına yani (r)'e eşittir. Uyum eğrisel fonksiyonla ifade edildiği durumda ise her zaman (η) değeri (r)'den büyüktür. (r) -1 ile +1 arasında değişirken (η) değeri 0 ve +1 arasında değişir.

Bağlantı sıklığını tanımlamak için “Cheddoka” tablosu kullanılmıştır. Bu nedenle zayıf bir bağlantıda ($r = 0.10-0.29$), orta bir bağlantıda ($r = 0.30-0.49$), güçlü de ($r = 0.50-0.69$) ve çok güçlü ($r = 0.90-0.99$) için korelasyon katsayılarına ihtiyaç vardır.

Çizelge 1. Cheddoka skalası

No	Korelasyon katsayısı	Performans
1	0.10 - 0.29	Zayıf
2	0.30 - 0.49	Orta
3	0.50 - 0.69	Sezilebilir- Büyük
4	0.70 - 0.89	Yüksek- Güçlü
5	0.90 - 0.99	Çok yüksek- Çok Güçlü

2. R-kare ölçütü: Determinasyon katsayısı (R^2)

Regresyon doğrusunun gözlemlere ne denli uyduğunu ortaya koyan göstergelerden biri determinasyon (belirlilik) katsayısıdır. Bu katsayı aynı zamanda, bağımlı değişkendeki değişmelerin yüzde kaçının bağımlı değişken ya da değişkenler tarafından açıklandığını gösterir. Determinasyon katsayısı 0 ile 1 arasında pozitif bir değer olup, korelasyonun karesidir. Determinasyon katsayısından hareketle regresyon modelinin bir bütün olarak geçerliliğini de test etmek mümkündür. Determinasyon katsayısı, $R^2 = 1 - RSS / TSS$ şeklinde ifade edilirken formülü ise aşağıdaki gibidir.

$$R^2 = \eta^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (3)$$

R^2 'nin kullanımı determinasyon katsayısı, aynı zamanda “çoklu korelasyon” katsayısı olarak adlandırılır, klasik regresyon analizleri kurulur (Rao, 1973). Regresyon modeliyle “açıklanmış” varyans oranı olarak tanımlı, bağımsız değişkenlerden bağımlı değişkeni tahmin başarısının bir ölçüsü olarak yararlı hale getirir. Kısacası, Draper ve Smith (1966), determinasyon katsayısını gözden geçirerek genel doğrusal model için tahminlerle uygunluğun ve hassaslığın bir ölçüsü olarak tanımlamıştır.

R^2 ölçütünün en önemli sakıncalı yönü, bunun bir “örneklem içi” regresyonun uygunluk derecesi ölçütü olmasıdır. Diğer bir deyişle, R^2 'si yüksek diye modelin “örneklem dışı” gözlemleri iyi tahminde bulunacağına güvenilemez.

R^2 model seçim ölçütü olarak alındığında bazı sorunlarla karşılaşılır (Gujarati, 2003).

- ✚ Verilen örnek büyüklüğü içinde tahmini değerler gerçek değerlere her ne kadar yakın bulunsalar da gelecek tahmininde bu garantiyi sağlamak mümkün olmayabilir.
- ✚ R^2 'lerin karşılaştırılabilmesi için modellerin fonksiyonel yapısının ve tahmin edicilerinin aynı olması gerekmektedir. Farklı model yapıları için birçok R^2 örneği verilebilir. Bunlardan bazıları: Maddala R^2 , Gragg- Uhler R^2 , McFadden R^2 , Estrella R^2 , Pseudo R^2 (McFadden'a benzer fakat probit modellemelerinde kullanılır)
- ✚ Modele alınan açıklayıcı değişken sayısı arttıkça R^2 değeri de artmaktadır. Bu yöntemle maksimum R^2 'ye ulaşılabilir. Fakat bu durum gelecek tahmin hata

varyansının da yükselmesine neden olacaktır. Bu nedenle model seçim ölçütü olarak alınması her zaman yeterli değildir.

R^2 'nin yorumlanmasındaki zorluklardan kaçınmak için, bazı araştırmacılar düzeltilmiş \bar{R}^2 'yi kullanmayı tercih etmişlerdir (Haitovski, 1969).

3. Düzeltilmiş R-kare ölçütü: (\bar{R}^2)

1971 yılında Henry Theil tarafından geliştirilen düzeltilmiş R-kare ifadesi:

$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-p} \quad (4)$$

olarak yazılabilir. Burada; n - kullanılan veri sayısı ve k -modelin değişkenleri katsayıları sayısıdır.

Düzeltilmiş R_{adj}^2 ölçütü, R^2 'den farklı olarak eklenen değişkenin sadece mutlak t değerinin 1'den büyük olduğu durumlarda yükselir ve daima $R_{adj}^2 \leq R^2$ 'dir.

Fakat unutulmaması gereken model karşılaştırmalarında ister R_{adj}^2 veya R^2 kullanılsın her zaman modelin fonksiyonel yapısını ve tahmin edicilerinin aynı olmasıdır.

Modeller arası karşılaştırma açısından R_{adj}^2 daha iyidir ama karşılaştırmanın geçerli olabilmesi için burada da bağımlı değişkenlerin aynı olması zorunluluğu unutulmamalıdır.

Modeller seçim analizinde karşılaştırıldığında her zaman maksimum R_{adj}^2 değerini veren model tercih edilir.

Düzeltilmiş R_{adj}^2 en küçük kareler ile tahmin edilmiş regresyonlarda daha çok kullanılmaktadır.

4. Ortalamanın standart sapması ($\sigma_{y;x}$) (RMSE)

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}} = \sigma = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n-p-1} \text{ESS}} & \text{if } n \leq 30 \\ \sqrt{\frac{1}{n-p} \text{ESS}} & \text{if } n > 30 \end{cases} \quad (5)$$

Burada; n — Bağımsız x_i değişkenlerinin ölçüm sayıları, m — Ampirik modelin parametrelerinin sayısıdır. İstatistik parametreler, genellikle birkaç matematiksel model karşılaştırılırken uygulanan modelin geçerliliğini test etmek için kullanılır.

RMSE ölçülmüş değerler etrafında tahmin edilmiş değerlerdeki değişim değerlerini ve ortalama etrafındaki ölçümler değişkenliğini tahmin etmek için model hatalarının nasıl olduğunu gösterir (Willmott ve Matsuura, 2005). RMSE'nin daha düşük sınırı 0'dır, hangi model tahminleri ve ölçümleri arasında tam uyum olduğu anlamındadır.

5. Bağlı yüzde hatası ($\bar{\varepsilon}$) (MAPE)

Ortalama Yüzde Hata modeli temel performans ölçütü olarak kabul edilir. Ortalama yüzde hata bağıl hataların mutlak değerinin yüzdesidir. Ölçülen değerlerden tahmin edilen ortalama mutlak değerlerin mesafesini (sapma) gösterir. Şu şekilde yazılmaktadır:

$$\text{MAPE} = A = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{u_i - \tilde{u}_i}{u_i} \right| \quad (6)$$

MAE ölçülmüş değerlerden ortalama tahmin edilmiş değerlerin sapma uzaklığını gösterir. İdeal olarak, MAE ve RMSE değerleri sıfıra yakındır (Willmott ve Matsuura, 2005). Bulunan ε değeri $<10\%$ ise sonuç iyi, ε değeri $>10\%$ ise sonuç iyi değildir.

6. Uyumluluk indeksi (D)

Ölçülen değerler ile ilgili olarak modellenen toprak sıcaklığının doğruluğunu gösterir (Willmott, 1981, 1982; Willmott et al., 1985; Willmott ve Wicks, 1980).

$$D = 1.0 - \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \tilde{u}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (|u_i - \bar{u}| + |\tilde{u}_i - \bar{u}|)^2} \quad (7)$$

Burada, y_i —Gözlemlenen bağımlı değişkenin (ölçülen sıcaklık) değerleri, \tilde{y} — Bağımlı değişkenin regresyon denkleminde göre hesaplanmış (tahmin edilen sıcaklık) değerleri, \bar{y} — Bağımlı değişkenin ortalama (ölçülen sıcaklıkların ortalaması) değerleridir. İndeks 0 ile 1 arasında değişir. 1’de mükemmel uyum olduğu anlaşılır.

7. Güven indeksi (C)

Bu indeksi (Camargo ve Sentelhas, 1997)’de kullanmışlardır. Güven indeksi (C), uyumluluk indeksi (D) ile korelasyon katsayısının (η) çarpımı ile elde edilir.

$$C = \eta \cdot D \quad (8)$$

Çizelge 2. Güven indeksinin yorumlanması için kriterler

No	Güven İndeksi “C”	Performans	Sembol
1	> 0.85	En iyi	Eİ
2	0.76 - 0.85	Çok iyi	Çİ
3	0.66 - 0.75	İyi	İ
4	0.61 - 0.65	Orta	O
5	0.51 - 0.60	Kötü	K
6	0.41-0.50	Çok kötü	ÇK
7	≤ 0.40	En kötü	EK

8. Theil'in tahmin doğruluk katsayısı

Henry Theil iki hata ölçümü tanımladı. Birinci ölçüm (Theil, 1958)’de önerildi. U1 basit değişiklik olmayan modelde tahminini karşılaştırır. U1 0 ile 1 arasına düşer. 0 değeri mükemmel tahmin performansı anlamına gelir. 1 değeri tahmini bir değer olarak henüz kullanılan son gerçek gözlemden daha iyi değildir. (Bliemel, 1973) U1 ”tahmini doğruluğu değerlendirmek için bir indeks olarak değeri yok ya da var” olarak analiz etmiş ve sonuçlandırmıştır. 1 değeri sadece basit değişiklik olmayan bir tahminci uygulandığında elde edilmiş olacak. Bütün diğer tahminler, tahmin metodu doğal değişiklik olmayan modelden daha iyi veya kötü performansla neden olup olmadığına bakılmaksızın 1’den daha düşük U1 değerine neden olabilir. Bliemel (1973), Theil’in sonraki sürümü statistik U2 ve U3 versiyonunu uygulamayı önerdi. Theil’in U- statistik1 aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$UI = \frac{\sqrt{ESS}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 + \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i^2}}, \quad UII = \frac{\sqrt{ESS}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}, \quad UIII = \frac{\sqrt{ESS}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i^2}} \quad (9)$$

İkinci ölçüm önerildi (Thiel, 1966). U2 basit tahminden daha iyi tahmin olup olmadığını gösterir ki bu her zaman 0’dır. U2 için 0 onaylı mükemmel tahmin değerini toplar. 1’den daha düşük değer, 1’den daha yüksek ve doğal tahmini geçer, bu tahmin doğal tahminden daha kötüdür.

9. Akaike bilgi ölçütü: (AIC)

Akaike ölçütü (Akaike, 1974) Hirotugu Akaike tarafından geliştirmiştir. Birden çok *AIC* tanımı vardır. En küçük kareler tahmininde gretl, Akaike'nin kendi tanımına dayalı, şu formülü kullanır:

$$\mathbf{AIC}/n = \ln\left(\frac{\mathbf{ESS}}{n}\right) + \frac{2K}{n}, \quad \text{if } \frac{n}{K} > 40 \quad (10)$$

Daha sonraki dönemlerde Hurvich ve Tsai (1989)'nin küçük örnek zaman serisi regresyon modelleri için kullanılan eğilimsiz *AIC*'den türetmiş oldukları *AIC_c* aşağıdaki gibidir (Zucchini, 2000).

$$\mathbf{AIC}_{cor}/n = \ln\left(\frac{\mathbf{ESS}}{n}\right) + \frac{2K}{n-(K+1)}, \quad \text{if } \frac{n}{K} < 40 \quad (11)$$

AIC'nin bazı özellikleri şöyle sıralanır:

- ✚ Model karşılaştırmalarında her zaman en düşük *AIC* değerini veren model tercih edilir.
- ✚ *AIC* sadece seçili örnek büyüklüğü içinde değil aynı zamanda seçili örnek büyüklüğü dışındaki gelecek tahmini içinde geçerlidir.
- ✚ Yuvalanmış, yuvalanmamış ve gecikmeli modellerde rahatlıkla kullanılabilir.
- ✚ *AIC* ne kadar küçükse modelin uygunluğu da o kadar iyidir. Modeller karşılaştırılırken *AIC* değeri düşük olan tercih edilir.

AIC ölçütünün en büyük üstünlüğü hem örneklem içi hem örneklem dışı başarıyı karşılaştırmada kullanılabilmesidir.

10. Bayesçi -Schwarz bilgi ölçütü (*BIC*)

Akaike (1978) ve Schwarz (1978) bayes perspektifinden birbirine yakın tutarlı iki model seçim kriteri tasarlamışlardır. Schwarz Koopman-Darmois türünde seçme modeller için SIC kriterini türetirken buna karşın Akaike doğrusal regresyonda seçilmiş model problemleri için *BIC* model seçim kriterini türetmiştir (Mc Quarrie ve Tsai, 1998.).

Bu ölçüt (Schwarz, 1978)'da Gideon Schwarz tarafından önerildiği için Schwarz ölçütü olarak da bilinir. Formülü:

$$\mathbf{BIC}/n = \ln\left(\frac{\mathbf{ESS}}{n}\right) + \frac{p}{n} \cdot \ln n = \ln\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i - \tilde{u}_i)^2\right] + \frac{p}{n} \cdot \ln n \quad (12)$$

BIC ise, *AIC* formülü ile karşılaştırılınca görülebildiği gibi, modele değıştirge eklemeyi daha ciddi şekilde cezalandırır.

BIC eşitliğin sağ tarafındaki örnek büyüklüğüne bağlı olan ikinci kısım itibariyle *AIC*'den farklılık gösterir. Fakat *AIC* ve *BIC* arasındaki yüzeysel benzerliğe rağmen, daha sonraları bayes yapısı içinde farklılıklar gösterdiği ortaya çıkmıştır (Raftery, 1995; Weasserman, 2000).

11. Hannan-quinn ölçütü: (*HQC*)

Tutumlu modelleri *AIC*'ten daha fazla ödüllendiren bir diğeri ölçüt de (Hannan ve Quinn, 1979) tarafından önerilen *HQC*'dir:

$$\mathbf{HQC}/n = \ln\left(\frac{\mathbf{ESS}}{n}\right) + \frac{2p}{n} [\ln(\ln n)] \quad (13)$$

Hannan ve Quinn, yinelemeli logaritma kanununa dayanan *HQC*'nin almaşıklarından üstün olduğunu savunmuşlardır.

HQC kullanımı, diğeri iki ölçüt gibi yaygındır. Ancak, bu üç ölçütten birinin diğeri üstün olduğu tartışmalıdır.

AIC, *BIC*, ve *HQC* hesaplamasında kullanılan formüller bilgisayar yazılımından yazılımına farklılık gösterebildiği için, asıl önemli olan nasıl yorumlanacaklarını bilmektir.

Gretl'da her üç ölçüt için de küçük değerler daha iyidir.

SIC'nin bazı özellikleri şöyle sıralanır:

- ✚ *SIC*, *AIC*'ye göre yeni değişkenlerin modele eklendiğinde ortaya çıkacak durumu değerlendirme hususunda daha dikkatli düzenlenmiştir.
- ✚ *SIC* her zaman *AIC*'den daha düşük çıkar

AIC'de olduğu gibi sadece seçili örnek büyüklüğü içinde değil aynı zamanda seçili örnek büyüklüğü dışındaki gelecek tahmini içinde geçerlidir.

12. Fisher kriteri

The significance of regression equation and to study regression model quality as a whole is examined by using Fisher's exact test (F-test). Establishing adequacy simple and multiple linear models is checked by using F-test which is determined from the formula (Montgomery et al, 2012):

$$F(p-1, n-p) = \frac{MSR}{MSE} = \frac{RSS/(p-1)}{ESS/(n-p)} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-p}{p-1} \quad (14)$$

The factual value of F-test is compared with the tabulated point $\mathbf{F}_{tabl}(\alpha, k_1, k_2)$ whose value should be determined by a special table based on the significance level α and the degrees of freedom $k_1 = p-1$ and $k_2 = n-p$. Here (Ismayilov and Mikailsoy, 2015):

- if $\mathbf{F} > \mathbf{F}_{tabl}(\alpha, k_1, k_2)$, then the model is adequate. At this point the regression analysis ends;
- if $\mathbf{F} < \mathbf{F}_{tabl}(\alpha, k_1, k_2)$, then the model is inadequate. Then the starting model should be changed and all the calculations be repeated.

It should be noted that if the models are not nested, one cannot use the F-ratio or any likelihood-ratio test for that matter. In this case, one may use Akaike's Information Criterion (AIC) after testing for plausibility of each model. For two nested models, for example, one with two parameters and one with four parameters, to check whether the addition of parameters has a statistically significant contribution to the model performance, we can use the \mathbf{F} test.

To choose the best between these models, the methods of comparing models were applied: information criterion Akaike (AIC) and Bayesian information criterion (BIC) (Burnham and Anderson, 2002).